Tentamen Algebra op 19 november 2001

1 Vind de kleinste $x \in \mathbb{N}$ waarvoor

(a) $16x \equiv 8 \bmod 270$.

(b) $x \equiv 3 \bmod 8$, $x \equiv 2 \bmod 9$ en $x \equiv 1 \bmod 11$.

(c) $x^3 \equiv 17^{127} \bmod 72$.

2 **(a)** Hoeveel onderling niet isomorfe abelse groepen met 360 elementen bestaan er?

(b) Verzin een $N \in \mathbb{N}$ zodat $G := (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ orde 360 heeft.

(c) Bepaal de elementaire delers van G.

(d) Hoeveel elementen van orde 30 heeft G?

(e) Bepaal de orde van $\overline{17} = 17 + N\mathbb{Z} \in G$.

(f) Hoeveel ondergroepen heeft G?

3 Geef een basis voor de groep

$$H := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix} \right) \in \mathbb{Z}^3 \middle| \, a \equiv c \bmod 6, \; b \in 3\mathbb{Z}, \; 3a = 6b + 2c \right\}$$

en bepaal de structuur van $\mathbb{Z}^3/H$, d.w.z. de rang en de elementaire delers.

4 Haal je weer even de definitie van A_n voor de geest.

(a) Geef alle $n \in \mathbb{N}$ waarvoor A_n een element van orde 12 heeft.

(b) Hoeveel conjugatieklassen heeft A_5?

5 We bekijken de groep van complexe bovendriehoeksmatrices

$$G := \{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix} \right) | \, a, d \in \mathbb{C}^*, \; b \in \mathbb{C} \}$$

als ondergroep van $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Bewijs dat

$$H := \{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix} \right) | \, a, b \in \mathbb{C}, \; |a| = 1, \; d \in \mathbb{R}_{>0} \}$$

een normaaldeler van G is en dat $G/H \simeq \mathbb{C}^*$.
(Merk op dat $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} | \, x > 0\}$ een ondergroep van de vermenigvuldiggroep $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ is.)